Analisi armonica e “partitura musicale”

SCHEMA: tre diversi “livelli matematici” di rappresentare segnali acustici:

Analisi armonica e “partitura musicale”

SCHEMA: tre diversi “livelli matematici” di rappresentare segnali acustici:

Trigonometria $\longrightarrow$ **Segnali con una frequenza**

Analisi armonica e “partitura musicale”

SCHEMA: tre diversi “livelli matematici” di rappresentare segnali acustici:

Trigonometria	$\longrightarrow$	**Segnali con una frequenza**
Trasformata di Fourier	$\longrightarrow$	**Segnali con piú frequenze**

Analisi armonica e “partitura musicale”

SCHEMA: tre diversi “livelli matematici” di rappresentare segnali acustici:

Trigonometria $\longrightarrow$ **Segnali con una frequenza**

Trasformata di Fourier $\longrightarrow$ **Segnali con piú frequenze**

Trasformata di Gabor $\longrightarrow$ **Segnali con più frequenze variabili nel tempo**
(ovvero Rappresentazioni Tempo-Frequenza, ovvero Partitura Musicale)

I. LIVELLO

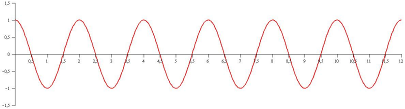
segnale $f(x)$ periodico
di periodo T

$\longrightarrow$

frequenza
$\omega = \frac{1}{T}$

ESEMPIO:

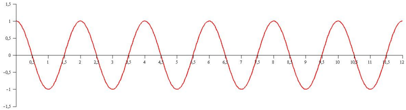
$f_1(x) = \cos(\pi x) = \cos(2\pi \frac{1}{2} x)$
di periodo $T_1 = 2$
e frequenza $\omega_1 = 1/2$,



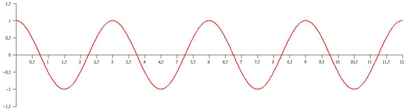
Questa corrispondenza è in genere troppo semplice per fornire la corretta frequenza della "nota" contenuta nel segnale...

ESEMPIO:

$f_1(x) = \cos(2\pi \frac{1}{2} x)$
di periodo $T_1 = 2$
e frequenza $\omega_1 = 1/2$,

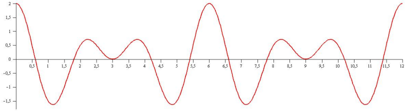


$f_2(x) = \cos(2\pi \frac{1}{3} x)$
di periodo $T_2 = 3$
e frequenza $\omega_2 = 1/3$.



Sovrapponiamo i due segnali, ovvero supponiamo che le due note di frequenze $1/2$ ed $1/3$ siano suonate contemporaneamente. Poichè le oscillazioni fisicamente si sommano, ciò equivale a considerare il segnale

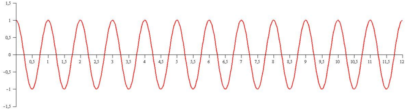
$f(x) = f_1(x) + f_2(x) =$
$\cos(2\pi \frac{1}{2} x) + \cos(2\pi \frac{1}{3} x)$.



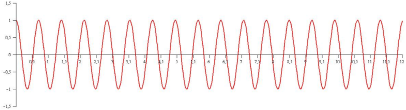
Si tratta di una funzione periodica di periodo $T = m.c.m.\{T_1, T_2\} = 6$ e il nostro metodo porta ad associare ad $f(x)$ la frequenza $\omega = \frac{1}{6}$.
È però ovvio che chi ascolta il segnale $f(x)$ non sente la nota $\frac{1}{6}$ ma continua a riconoscere contemporaneamente le due note $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$!!!

ESEMPIO:

$f_1(x) = \cos(2\pi x)$,
di periodo $T_1 = 1$
e frequenza $\omega_1 = 1$,

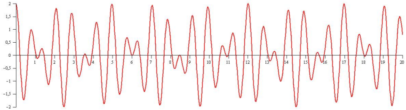


$f_2(x) = \cos(2\pi\sqrt{2}x)$
di periodo $T_2 = 1/\sqrt{2}$
e frequenza $\omega_2 = \sqrt{2}$.



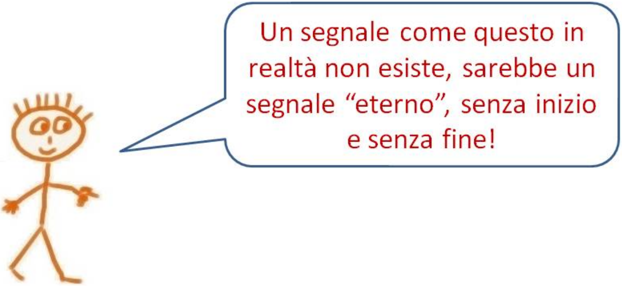
Come prima, consideriamo la sovrapposizione dei due segnali, ovvero la funzione:

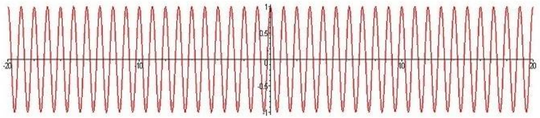
$f(x) = f_1(x) + f_2(x) =$
$\cos(2\pi x) + \cos(2\pi\sqrt{2}x)$.



la funzione somma non è più periodica!!!. (Infatti $m.c.m.\{1, \sqrt{2}\}$ non esiste). Dunque il nostro metodo non funziona sul segnale $f(x)$ ... tuttavia il nostro orecchio tuttavia continua a riconoscere contemporaneamente le due note!

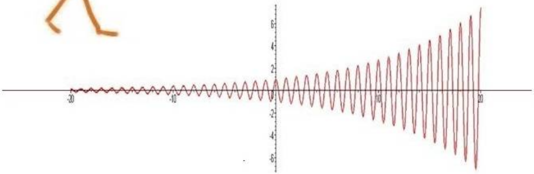
ESEMPIO:


Un segnale come questo in realtà non esiste, sarebbe un segnale "eterno", senza inizio e senza fine!

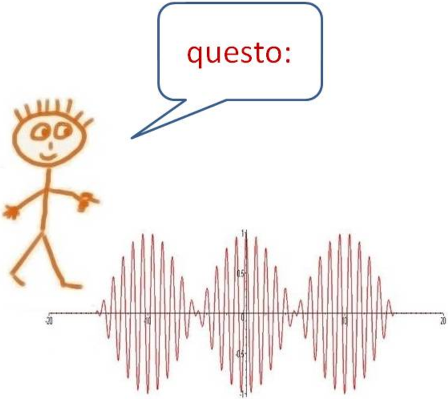

-20
-10
0
10
20
1
0.5
-0.5
-1

ESEMPIO:

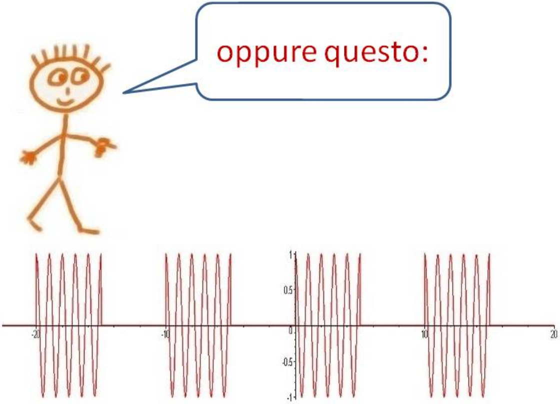
ESEMPIO:



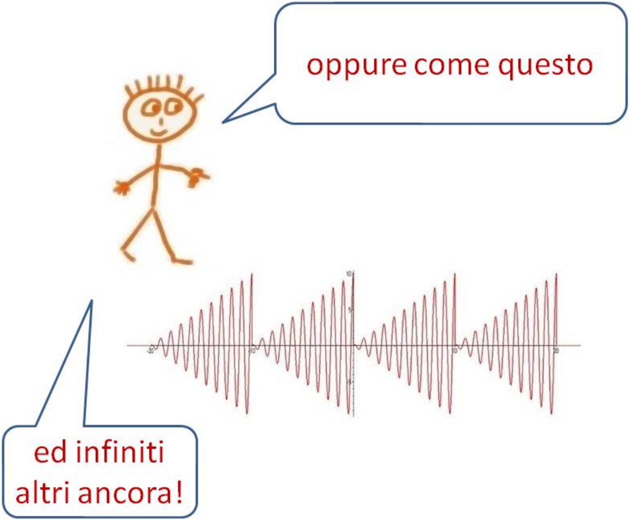
ESEMPIO:



ESEMPIO:



ESEMPIO:



Ai segnali ora visti non si può applicare la formula ω = **1/T** per determinarne la frequenza poiché non sono funzioni periodiche!

II. LIVELLO

sostituiamo la corrispondenza:

segnale $f(x)$ periodico di periodo T $\longrightarrow$ frequenza $\omega = \frac{1}{T}$

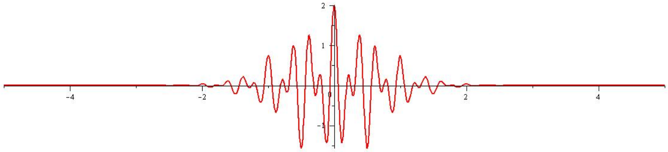
con

segnale $f(x)$ $\longrightarrow$ Trasformata di Fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega t} f(t)dt$$

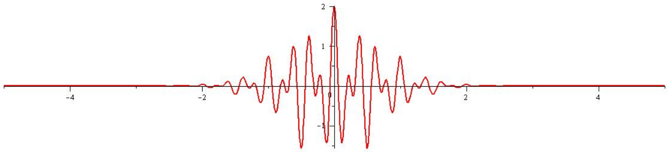
Interpretiamo la funzione $\widehat{f}(\omega)$ come "distribuzione di frequenze".

ESEMPIO:
Consideriamo un segnale con frequenze smorzate:

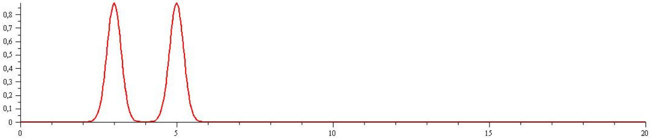


Possiamo risalire alle frequenze originali ?

ESEMPIO:
Consideriamo un segnale con frequenze smorzate:

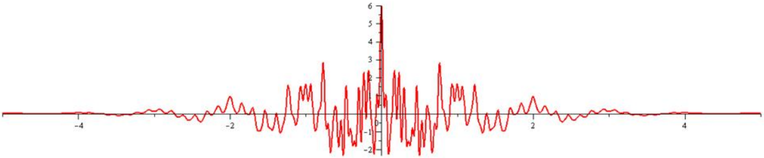


Possiamo risalire alle frequenze originali ?
SI! Ecco cosa si ottiene come trasformata di Fourier:

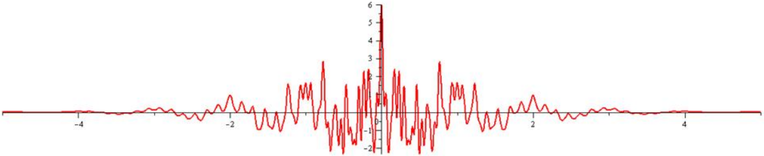


le due "colline" indicano che le frequenze del segnale sono concentrate attorno ai valori $\omega = 3$ ed $\omega = 5$.

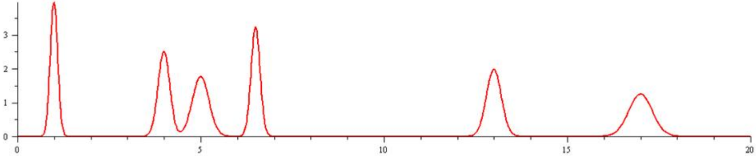
ESEMPIO:
segnale con più frequenze smorzate:



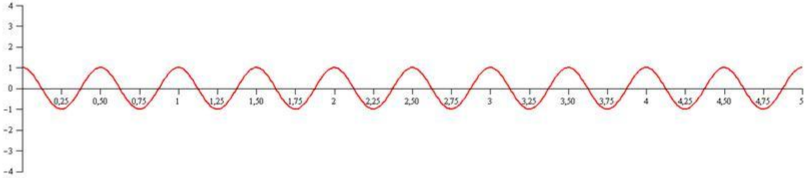
ESEMPIO:
segnale con più frequenze smorzate:



Trasformata di Fourier:

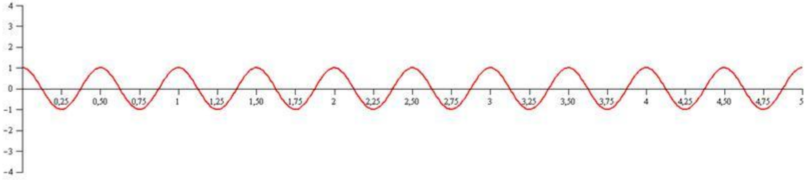


Come si comporta la trasformata di Fourier su onde "frequenze pure "?

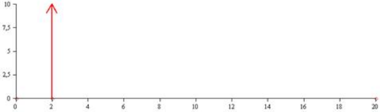


C'è qualche sorpresa...

Come si comporta la trasformata di Fourier su onde “frequenze pure ”?

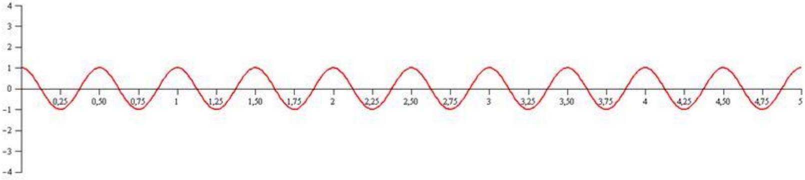


C’è qualche sorpresa...
Trasformata di Fourier:

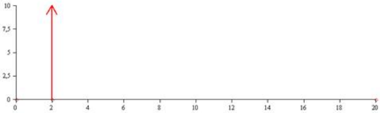


La “freccia” posizionata esattamente in corrispondenza di $\omega = 2$ indica che tale frequenza è l’unica contenuta nel segnale e non ci sono “dispersioni”

Come si comporta la trasformata di Fourier su onde "frequenze pure "?

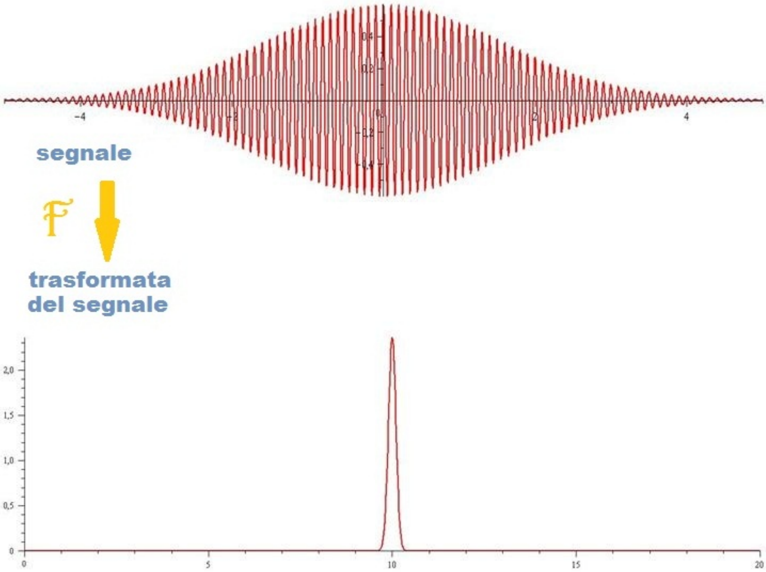


C'è qualche sorpresa...
Trasformata di Fourier:

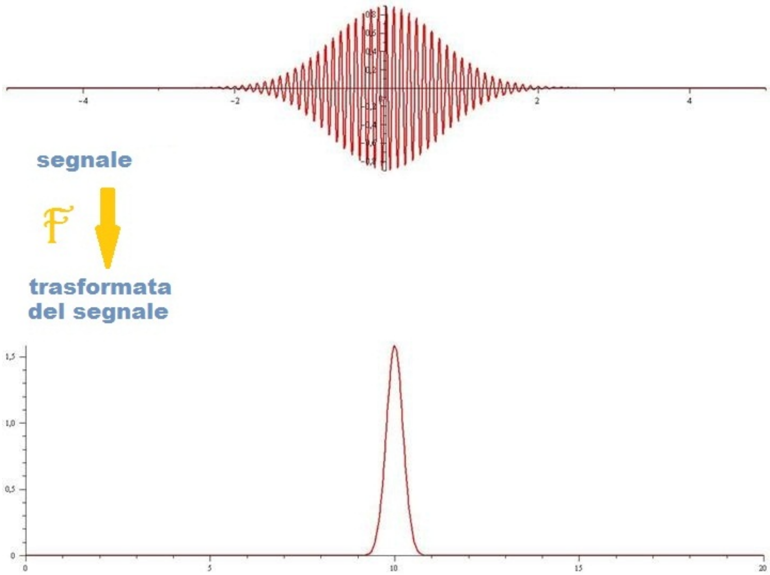


La "freccia" posizionata esattamente in corrispondenza di $\omega = 2$ indica che tale frequenza è l'unica contenuta nel segnale e non ci sono "dispersioni"
ATTENZIONE! la trasformata del segnale non è più una funzione ma una "*distribuzione*"...un nuovo oggetto matematico che generalizza le funzioni

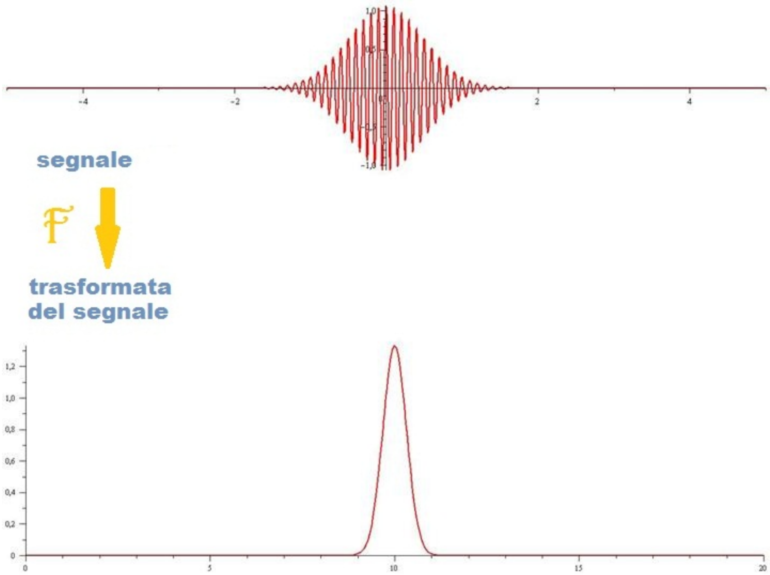
Due inconvenienti
Inconveniente n.1: Principio di Indeterminazione



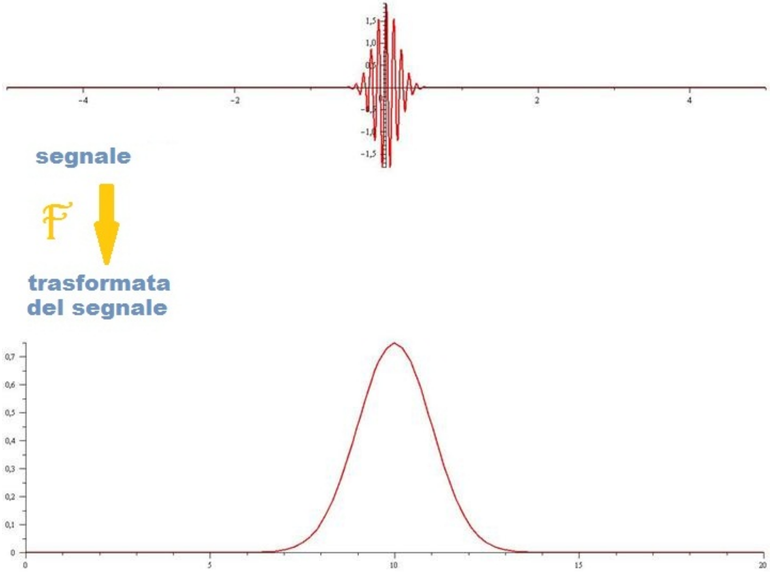
Due inconvenienti
Inconveniente n.1: Principio di Indeterminazione



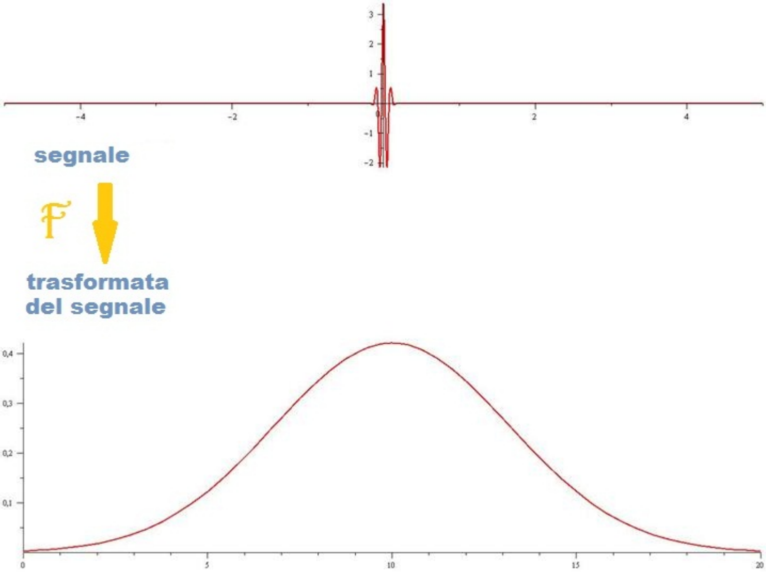
Due inconvenienti
Inconveniente n.1: Principio di Indeterminazione



Due inconvenienti
Inconveniente n.1: Principio di Indeterminazione



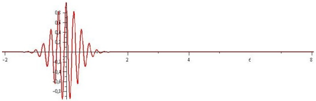
Inconveniente n.1: Principio di Indeterminazione



Due inconvenienti

Inconveniente n.2: "sente ma non ricorda"

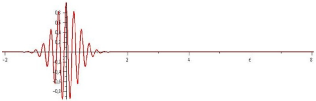
Immaginiamo di suonare una nota nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:



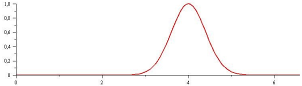
Due inconvenienti

Inconveniente n.2: “sente ma non ricorda”

Immaginiamo di suonare una nota nell’intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:



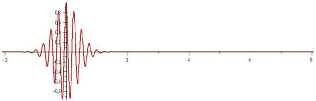
La trasformata di Fourier segnala la frequenza suonata:



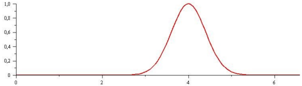
Due inconvenienti

Inconveniente n.2: "sente ma non ricorda"

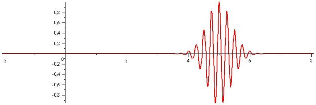
Immaginiamo di suonare una nota nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:



La trasformata di Fourier segnala la frequenza suonata:



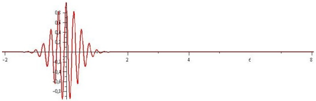
Suoniamo la stessa nota un "momento dopo" e cioé nell'intervallo $[t_0 + k, t_1 + k]$:



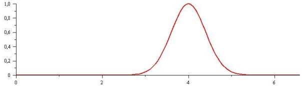
Due inconvenienti

Inconveniente n.2: "sente ma non ricorda"

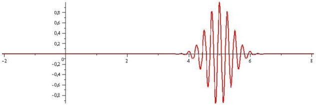
Immaginiamo di suonare una nota nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:



La trasformata di Fourier segnala la frequenza suonata:



Suoniamo la stessa nota un "momento dopo" e cioé nell'intervallo $[t_0 + k, t_1 + k]$:

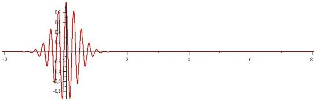


Come sará ora la trasformata di Fourier (in modulo)?

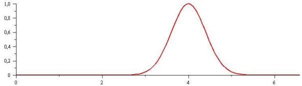
Due inconvenienti

Inconveniente n.2: “sente ma non ricorda”

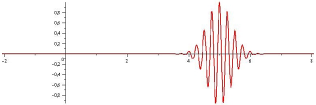
Immaginiamo di suonare una nota nell’intervallo di tempo $[t_0, t_1]$:



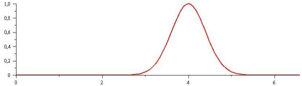
La trasformata di Fourier segnala la frequenza suonata:



Suoniamo la stessa nota un “momento dopo” e cioé nell’intervallo $[t_0 + k, t_1 + k]$:



Come sará ora la trasformata di Fourier (in modulo)?
Eccola:



...é uguale a prima!!!

III. LIVELLO

sostituiamo le corrispondenze:

segnale $f(x)$ periodico di periodo T $\longrightarrow$ frequenza $\omega = \frac{1}{T}$

ed

segnale $f(x)$ $\longrightarrow$ Trasformata di Fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega t} f(t)dt$$

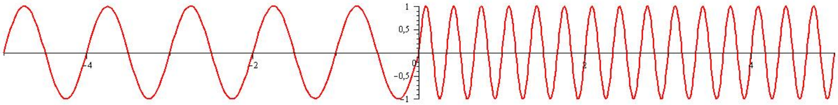
con

segnale $f(x)$ $\longrightarrow$ Trasformata di Gabor

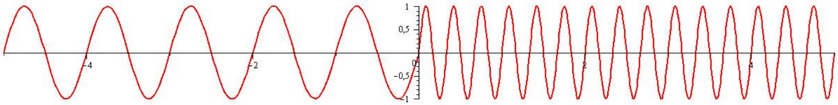
$$V_g(f)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega t} f(t)\overline{g(t-x)}dt$$

g ha ruolo di "finestra temporale".
Interpretiamo la funzione $V_g f(x,\omega)$ come "distribuzione di frequenze" nello spazio "tempo-frequenza".

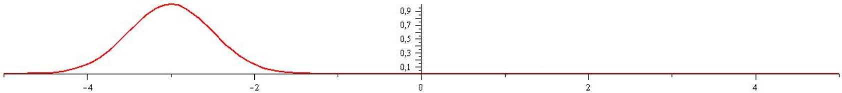
Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

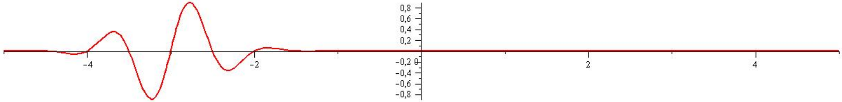


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

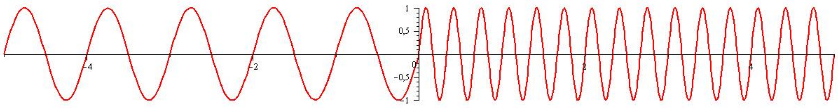


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

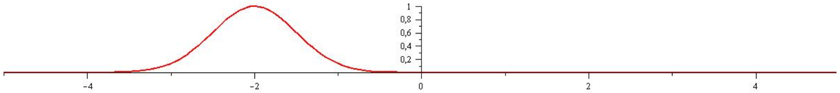


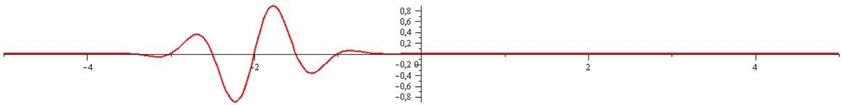


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

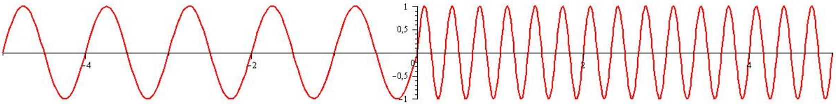


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

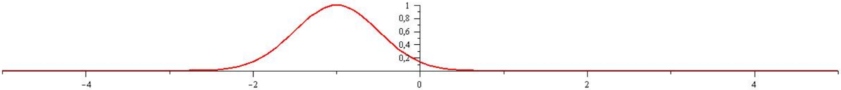


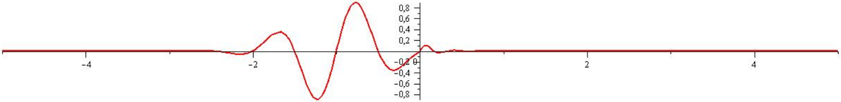


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

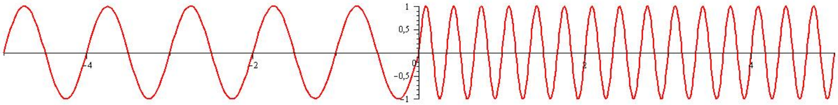


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

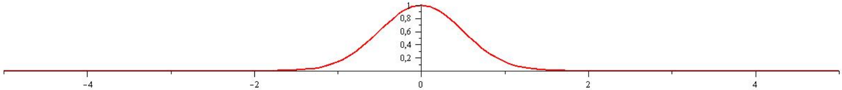


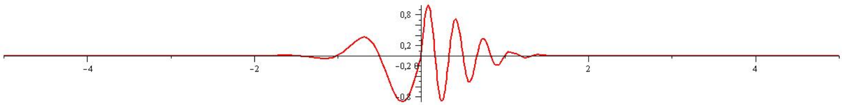


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

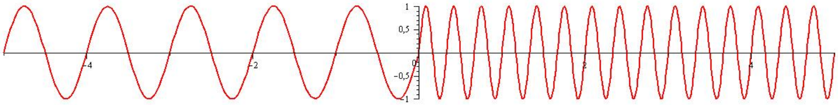


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

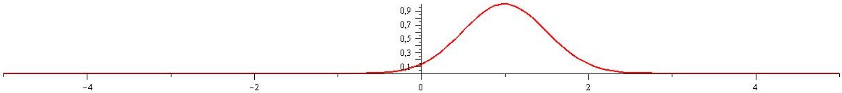


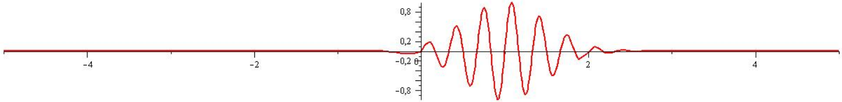


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

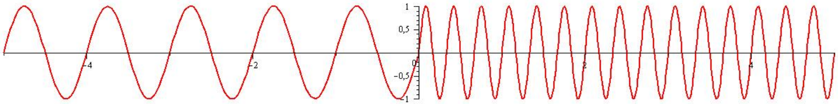


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

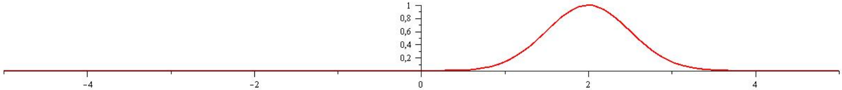


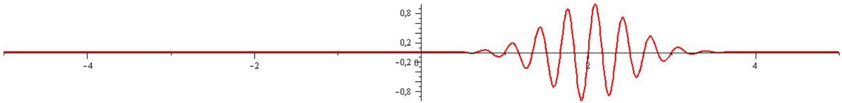


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

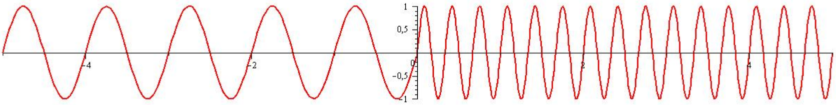


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

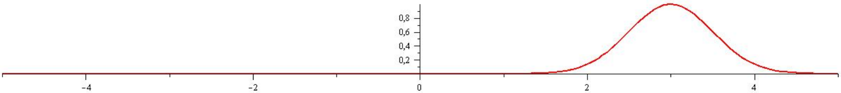


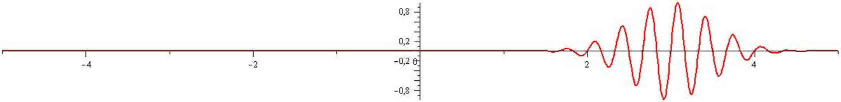


Esempio: consideriamo un segnale contenente due distinte frequenze ω_0 e ω_1:

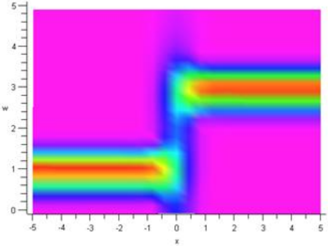


Scegliamo come finestra una funzione gaussiana e moltiplichiamo il segnale per essa, trasleremo poi la finestra lungo l'asse dei tempi:

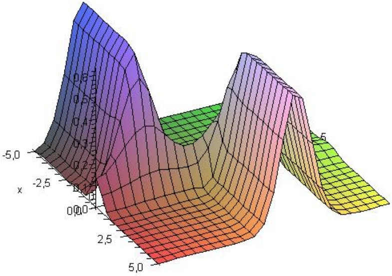




Se ora si applica la trasformata di Fourier si ottiene la seguente rappresentazione tempo-frequenza:

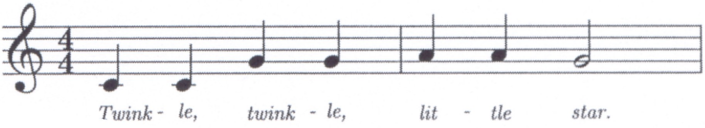


(a) visione dall'alto



(b) visione in 3d

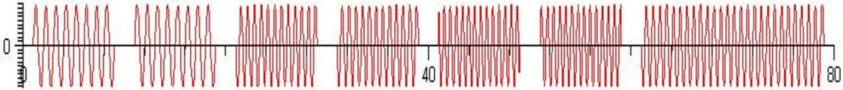
Esempio prime due battute del noto tema *Twinkle twinkle little star*:
(dalla tesi di Laurea di Davide Zucco)



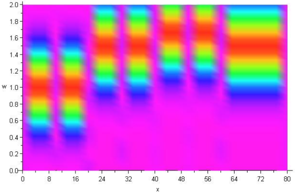
segnale:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot t) & \text{se } 1 < t < 9 \\ \sin(2\pi \cdot t) & \text{se } 11 < t < 19 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot t) & \text{se } 21 < t < 29 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot t) & \text{se } 31 < t < 39 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot t) & \text{se } 41 < t < 49 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot t) & \text{se } 51 < t < 59 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot t) & \text{se } 61 < t < 79 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

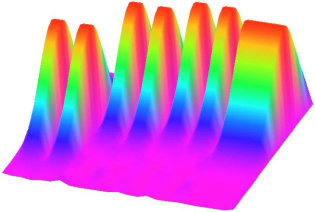
grafico:



Trasformata di Gabor:

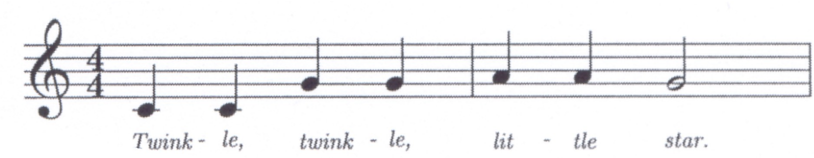


(c) visione dall'alto



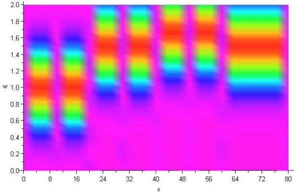
(d) visione in 3d

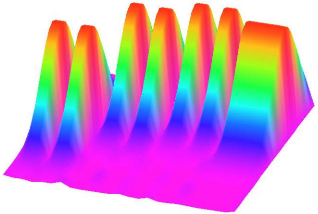
confrontiamo con la partitura:



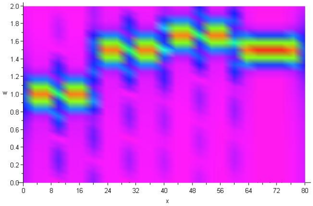
PROBLEMI: finestra larga o stretta?

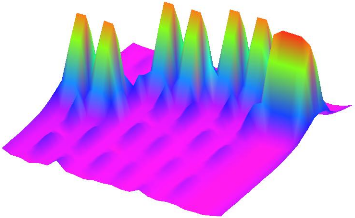
Finestra "stretta": buona risoluzione nei tempi, povera risoluzione nelle frequenze





Finestra "larga": buona risoluzione nelle frequenze, scarsa nei tempi





APPLICAZIONI: COME "RIPULIRE UN SEGNALE" DA DISTURBI

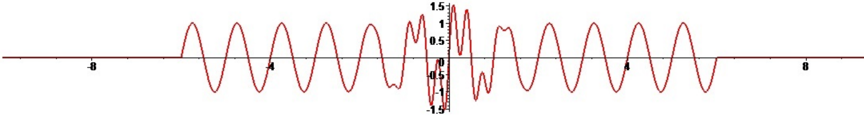
“Operatori di localizzazione” (=“filtri” variabili nel tempo): consistono in tre operazioni:

$$\left.\begin{array}{l} f(t) \longrightarrow \widetilde{f}(t) = \underbrace{\int_{\mathbf{R}^2} \underbrace{a(x,\omega)\,\underbrace{V_g f(x,\omega)}_{\text{analisi}}}_{\text{elaborazione}}\, e^{2\pi i\omega t} g(t-x)\,dxd\omega}_{\text{ricostruzione}} \end{array}\right\}\ \text{operatore di localizzazione}$$

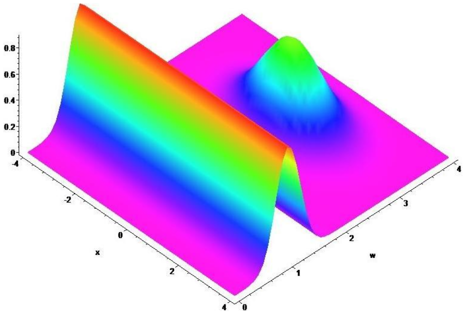
$f(x)$ è il segnale originario, $\widetilde{f}(x)$ è il segnale “ripulito”.

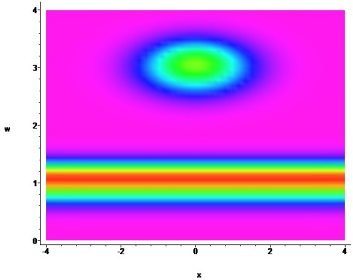
ESEMPIO

segnale contenente nell'intervallo di tempo $[-4, 4]$ la frequenza $\omega = 1$ soggetta ad un "disturbo" nelle vicinanze del tempo $t = 0$:



Trasformata di Gabor (finestra $g(t) = e^{-t^2}$):





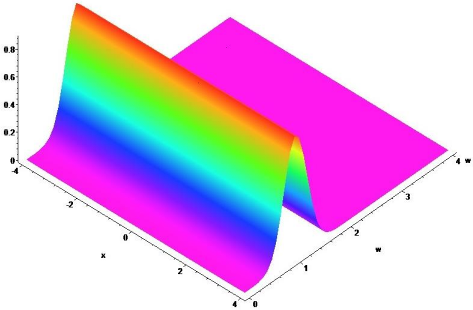
(rispettivamente in prospettiva e dall'alto)

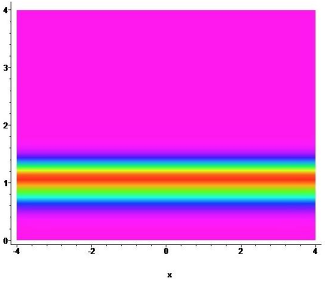
è ora chiaramente riconoscibile che il disturbo è contenuto nel rettangolo $R = [-2, 2] \times [2, 4]$ dello spazio tempo-frequenza.

Definiamo (ad esempio):

$$a(x,\omega) = \begin{cases} 0 & \text{per } (x,\omega) \in R; \\ 1 & \text{per } (x,\omega) \notin R. \end{cases}$$

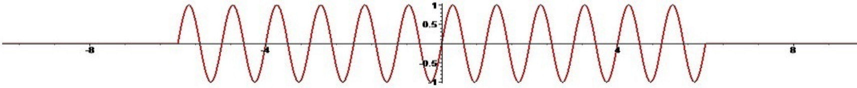
Il prodotto $a(x,\omega)V_g f(x,\omega)$ ha grafico:





in $a(x,\omega)V_g f(x,\omega)$ il disturbo è stato cancellato

Ricostruiamo ora il segnale usando la formula di ricostruzione:



segnale è stato "ripulito", possiamo ora ascoltare la frequenza $\omega = 1$ senza disturbi.

Le problematiche pratiche qui descritte in modo qualitativo sono punto di partenza di svariate teorie matematiche anche astratte (spazi di modulazione, principi di indeterminazione, trasformazioni tempo-frequenza e wavelets, algebre di operatori)